第30講　勘違いと条件付き確率

30

［A］ 凛太郎の住む地域では1000人に1人が病気Xにかかっているという．ある検査薬Fは，病気Xにかかっている人に使用した場合は確率αで病気Xであると判定して，病気Xにかかっていない人に使用した場合は確率βで病気Xであると判定するものとする．ここで凛太郎が検査薬Fを用いた結果病気Xだと判定されたときに本当に病気Xにかかっている確率をPとするとき，以下の問いに答えよ．

(1) $\alpha=\dfrac{19}{20}$，$\beta=\dfrac{1}{100}$のときPを求めよ．

(2) $\alpha=\dfrac{19}{20}$のとき,βがどのような条件を満たすとき$P>\dfrac{1}{2}$とすることができるか.

［B］ 凛太郎は，赤いコインか青いコインを2枚だけ持っているという．

(1) 寅次郎は凛太郎の持っている2枚のコインのうち1枚だけを見てしまい，もう1枚は見えなかった．見えたコインの色が青だったので，寅次郎は以下のように考えた．

「凛太郎の2枚のコインの組合せは『赤と赤』，『赤と青』，『青と赤』，『青と青』の4通りのはずで，今青が見えたから『赤と赤』の可能性はなく，『赤と青』，『青と赤』，『青と青』の3通りとなるから，凛太郎が2枚とも青のコインを持っている確率は$\dfrac{1}{3}$だな．」

寅次郎の間違いを説明せよ．

(2) 任三郎は凛太郎に「青いコイン持っている？」と聞いたとき，凛太郎は「うん，持っているよ．」と答えた．このとき凛太郎が2枚とも青のコインを持っている確率を求めよ．

［C］ 凛太郎は，自分からは見えない場所にあるゴミ箱にゴミを投げ入れようとしている．ゴミ箱は3種類あり，大きさの違いからゴミ箱A，ゴミ箱B，ゴミ箱Cにゴミが入る確率は，順に$\dfrac{1}{6}$，$\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{1}{2}$となっている．

3つのゴミ箱に何も入っていない状態で凛太郎がゴミを投げ入れたとき，京四郎がちょうどゴミ箱の傍を通りかかった．凛太郎が京四郎に「ゴミ箱Bかゴミ箱Cのどっちかにはゴミが入っていないはずだから，どっちのゴミ箱が空なのか教えてくれないか？」というと京四郎は「ゴミ箱Bが空だよ．」と答えた．…①

(1) ゴミ箱Bとゴミ箱Cが同時に空のときに，京四郎が「ゴミ箱Bが空だよ．」という確率が$\dfrac{1}{2}$であるとき，ゴミ箱Aにゴミが入っている確率を求めよ．

(2) ゴミ箱Bとゴミ箱Cが同時に空のときに，京四郎が「ゴミ箱Bが空だよ．」という確率がαのとき，①の条件のもとでゴミ箱Aにゴミが入っている確率が$\dfrac{1}{6}$になるという．αを求めよ．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第30講　勘違いと条件付き確率

30 ある監獄にA, B, Cという3人の囚人がいて，それぞれ独房に入れられている．近々3人まとめて処刑される予定になっていたが，恩赦が出て3人のうち1人だけ助かることになった．誰が恩赦になるかは明かされておらず，それぞれの囚人が「私は助かるのか?」と聞いても看守は答えない．

そこで，囚人Aは看守にこう頼んだ．「私以外の2人のうち少なくとも1人は死刑になるはずだ．その者の名前が知りたい．私のことじゃないんだから教えてくれてもよいだろう?」

すると看守は「Bは死刑になる」と教えてくれた．それを聞いた囚人Aは「これで助かる確率が $\frac{1}{3}$ から $\frac{1}{2}$ に上がった」とひそかに喜んだ．

囚人Aの間違いを指摘せよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 30 講　勘違いと条件付き確率

30

［A］ 凛太郎の住む地域では 1000 人に 1 人が病気 X にかかっているという．ある検査薬 F は，病気 X にかかっている人に使用した場合は確率 α で病気 X であると判定して，病気 X にかかっていない人に使用した場合は確率 β で病気 X であると判定するものとする．ここで凛太郎が検査薬 F を用いた結果病気 X だと判定されたときに本当に病気 X にかかっている確率を P とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) $\alpha=\dfrac{19}{20}$，$\beta=\dfrac{1}{100}$ のとき P を求めよ．

(2) $\alpha=\dfrac{19}{20}$ のとき, β がどのような条件を満たすとき $P>\dfrac{1}{2}$ とすることができるか.

［B］ 凛太郎は，赤いコインか青いコインを 2 枚だけ持っているという．

(1) 寅次郎は凛太郎の持っている 2 枚のコインのうち 1 枚だけを見てしまい，もう 1 枚は見えなかった．見えたコインの色が青だったので，寅次郎は以下のように考えた．

「凛太郎の 2 枚のコインの組合せは『赤と赤』，『赤と青』，『青と赤』，『青と青』の 4 通りのはずで，今青が見えたから『赤と赤』の可能性はなく，『赤と青』，『青と赤』，『青と青』の 3 通りとなるから，凛太郎が 2 枚とも青のコインを持っている確率は $\dfrac{1}{3}$ だな．」

寅次郎の間違いを説明せよ．

(2) 任三郎は凛太郎に「青いコイン持っている？」と聞いたとき，凛太郎は「うん，持っているよ．」と答えた．このとき凛太郎が 2 枚とも青のコインを持っている確率を求めよ．

［C］ 凛太郎は，自分からは見えない場所にあるゴミ箱にゴミを投げ入れようとしている．ゴミ箱は 3 種類あり，大きさの違いからゴミ箱 A，ゴミ箱 B，ゴミ箱 C にゴミが入る確率は，順に $\dfrac{1}{6}$，$\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{1}{2}$ となっている．

3 つのゴミ箱に何も入っていない状態で凛太郎がゴミを投げ入れたとき，京四郎がちょうどゴミ箱の傍を通りかかった．凛太郎が京四郎に「ゴミ箱 B かゴミ箱 C のどっちかにはゴミが入っていないはずだから，どっちのゴミ箱が空なのか教えてくれないか？」というと京四郎は「ゴミ箱 B が空だよ．」と答えた．…①

(1) ゴミ箱 B とゴミ箱 C が同時に空のときに，京四郎が「ゴミ箱 B が空だよ．」という確率が $\dfrac{1}{2}$ であるとき，ゴミ箱 A にゴミが入っている確率を求めよ．

(2) ゴミ箱 B とゴミ箱 C が同時に空のときに，京四郎が「ゴミ箱 B が空だよ．」という確率が α のとき，①の条件のもとでゴミ箱 A にゴミが入っている確率が $\dfrac{1}{6}$ になるという．α を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

【答】　[A] (1) $P=\dfrac{95}{1094}$　(2) $0 \leqq \beta < \dfrac{19}{19980}$

[B] (1) 略　(2) $\dfrac{1}{3}$

[C] (1) $\dfrac{1}{7}$　(2) $\dfrac{3}{5}$

【解答】

[A]　凛太郎が病気 X にかかっていて病気であると判定される確率は $\dfrac{1}{1000}\times\alpha$ であり，凛太郎が病気 X にかかっていなくて病気であると判定される確率は $\dfrac{999}{1000}\times\beta$ であるので，

$$P=\frac{\frac{1}{1000}\times\alpha}{\frac{1}{1000}\times\alpha+\frac{999}{1000}\times\beta}=\frac{\alpha}{\alpha+999\beta}\text{ となる．}$$

(1)　$\alpha=\dfrac{19}{20}$，$\beta=\dfrac{1}{100}$ より $P=\dfrac{\frac{19}{20}}{\frac{19}{20}+999\times\frac{1}{100}}=\boldsymbol{\dfrac{95}{1094}}$ となる．

(2)　$\alpha=\dfrac{19}{20}$ のとき $P=\dfrac{\frac{19}{20}}{\frac{19}{20}+999\beta}=\dfrac{19}{19+19980\beta}$ より

$$P>\frac{1}{2}\Longleftrightarrow\frac{19}{19+19980\beta}>\frac{1}{2}\qquad\therefore\ \boldsymbol{0\leqq\beta<\frac{19}{19980}}$$

[B](1)　『赤と赤』，『赤と青』，『青と赤』，『青と青』を持っている確率はいずれも $\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}$ と考えられる．

『赤と赤』の場合，青の見える確率は $\dfrac{1}{4}\times 0=0$,

『赤と青』の場合，赤と青を選ぶ確率はそれぞれ $\dfrac{1}{2}$ と考えられるので，『赤と青』の場合で青の見える確率は $\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{8}$，『青と赤』の場合も同様に，『青と赤』の場合で青の見える確率は $\dfrac{1}{8}$,

『青と青』の場合はどちらを選んでも青になるので，『青と青』の場合で青の見える確率は $\dfrac{1}{4}$ となる．

つまり，寅次郎の間違いは，『赤と青』と『青と赤』と『青と青』の場合がどれも同様に確からしいとしたことである．

(2)　青を持っているのは『赤と青』，『青と赤』，『青と青』の場合であり，(1)よりどの確率も $\dfrac{1}{4}$ である．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

よって求める確率は

$$\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}=\mathbf{\frac{1}{3}}$$

[C](1)　ゴミ箱Aにゴミが入っている場合，京四郎は確率 $\frac{1}{2}$ で「Bが空」と答えるので，そのときの確率は $\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{12}$

ゴミ箱Bにゴミが入っている場合，京四郎は「Bが空」と答えられないので，その確率は $\frac{1}{3}\times 0=0$

ゴミ箱Cにゴミが入っている場合，京四郎は必ず「Bが空」と答えるので，その確率は $\frac{1}{2}\times 1=\frac{1}{2}$

以上より，求める確率は

$$\frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{12}+0+\frac{1}{2}}=\mathbf{\frac{1}{7}}$$

(2)　ゴミ箱Aにゴミが入っていて京四郎が「Bが空」という確率は $\frac{1}{6}\alpha$,

ゴミ箱Bにゴミが入っていて京四郎が「Bが空」という確率は0,

ゴミ箱Cにゴミが入っていて京四郎が「Bが空」という確率は $\frac{1}{2}$ であり，

ゴミ箱Aにゴミが入っている確率が $\frac{1}{6}$ となるので

$$\frac{\frac{1}{6}\alpha}{\frac{1}{6}\alpha+0+\frac{1}{2}}=\frac{1}{6}\qquad\therefore\quad \alpha=\mathbf{\frac{3}{5}}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 30 講　勘違いと条件付き確率

30　ある監獄に A, B, C という 3 人の囚人がいて，それぞれ独房に入れられている．近々 3 人まとめて処刑される予定になっていたが，恩赦が出て 3 人のうち 1 人だけ助かることになった．誰が恩赦になるかは明かされておらず，それぞれの囚人が「私は助かるのか？」と聞いても看守は答えない．

そこで，囚人 A は看守にこう頼んだ．「私以外の 2 人のうち少なくとも 1 人は死刑になるはずだ．その者の名前が知りたい．私のことじゃないんだから教えてくれてもよいだろう？」

すると看守は「B は死刑になる」と教えてくれた．それを聞いた囚人 A は「これで助かる確率が $\frac{1}{3}$ から $\frac{1}{2}$ に上がった」とひそかに喜んだ．

囚人 A の間違いを指摘せよ．

【答】　略

【解答】　囚人 A が助かるとした場合，囚人 B と囚人 C の両方が死刑になるので，看守が「B が死刑になる」と言う確率は $\frac{1}{2}$ と考えられるので，囚人 A が助かり看守が「B は死刑になる」と言う確率は $\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$.

囚人 B が助かるとした場合，囚人 A と囚人 C の両方が死刑になるので，看守が「B は死刑になる」ということはない．囚人 B が助かり看守が「B は死刑になる」と言う確率は 0 である．

囚人 C が助かるとした場合，囚人 A と囚人 B の両方が死刑になるので，看守がかならず「B は死刑になる」と言うことになるので，囚人 C が助かり看守が「B は死刑になる」という確率は $\frac{1}{3}\times 1=\frac{1}{3}$.

以上より，看守が「B は死刑になる」と言った場合の囚人 A と囚人 C の助かる確率が異なっているのに，それを同じだと考えているところが囚人 A の間違いである．

ちなみに…

看守が「B は死刑になる」と言った場合の囚人 A の助かる確率は $\dfrac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{6}+0+\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}$ であり，

看守が「B は死刑になる」と言った場合の囚人 C の助かる確率は $\dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{6}+0+\frac{1}{3}}=\frac{2}{3}$ である．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。